Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 4

Twierdzenie o jednoznaczności miary
(λ i π-układy, miara Lebesgue'a)

Def. Rodzinę zbiorów $\mathcal{L} \subseteq 2^X$ nazywamy λ-**układem** na X jeśli

- **Λ1** $X \in \mathcal{L}$ (*zawiera całą przestrzeń*)
- **Λ2** $A \in \mathcal{L} \implies A' := X \setminus A \in \mathcal{L}$ (*zamknięta na dopełnienia*)
- **Λ3** $\underset{\text{parami rozłączne}}{\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}} \implies \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$ (*zamknięta na rozłączne sumy ciągów*)

Uw1. Każda σ-algebra jest λ-układem, ale nie na odwrót
(istnienie λ-układu nie będącego σ-algebrą trudne – temat na pracę dyplomową)

Uw2. λ-układ zawsze zawiera $\emptyset$ i jest zamknięty na skończone sumy rozłączne: $A, B \in \mathcal{L},\ A \cap B = \emptyset \implies A \sqcup B \in \mathcal{L}$

λ-układ nazywa się też **układem Dynkina**.

σ-algebra $= \lambda$-układ $+ \pi$-układ

Lem. λ-układ $\mathcal{L}$ jest σ-algebrą $\iff \mathcal{L}$ jest π-**układem**, tzn. jest zamknięty na skończone przekroje: $A, B \in \mathcal{L} \implies A \cap B \in \mathcal{L}$

Dowód: „$\Longrightarrow$" jasne bo każda σ-algebra jest λ i π-układem.
„$\Longleftarrow$" Niech $\mathcal{L}$ będzie λ i π-układem. Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}$. Kładąc $B_1 := A_1$, $B_2 = A_2 \cap A_1'$ i ogólnie $B_n := A_n \cap A_{n-1}' \cap \cdots \cap A_1'$ dla $n > 1$, dostajemy parami rozłączne $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}$ oraz $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Zatem $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$ na mocy (Λ3). ∎

Def. **λ-układem generowanym** przez rodzinę $\mathcal{G} \subseteq 2^X$ nazywamy najmniejszy λ-układ $\lambda(\mathcal{G})$ na X zawierający $\mathcal{G}$


(istnienie)

Uw. Z definicji wynika, że $\lambda(\mathcal{G}) \subseteq \sigma(\mathcal{G})$, a równość $\lambda(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda(\mathcal{G})$ jest σ-algebrą.


Sierpiński

Tw. (Lemat o λ i π-układach) Sierpiński 1928, Dynkin 1959

Jeśli rodzina $\mathcal{G} \subseteq 2^X$ jest zamknięta na przekroje, to

$$\lambda(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G}).$$

Równoważnie, λ-układ generowany przez π-układ jest π-układem.

Dowód: Na mocy **Uw** oraz **Lem** wystarczy pokazać, że $\lambda(\mathcal{G})$ jest π-układem! W tym celu użyjemy następujący **Fakt**

Fakt. Jeśli $\mathcal{L}$ jest λ-układem na X oraz $A \in \mathcal{L}$, to $\mathcal{L}_A := \{B \subseteq X : A \cap B \in \mathcal{L}\}$ też jest λ-układem na X.

Krok 1. Niech $A \in \mathcal{G}$ oraz $\lambda(\mathcal{G})_A = \{B \subseteq X : A \cap B \in \lambda(\mathcal{G})\}$.

$$\mathcal{G} \text{ jest } \pi\text{-układem} \implies \forall_{B \in \mathcal{G}}\ A \cap B \in \mathcal{G} \subseteq \lambda(\mathcal{G})$$

$$\implies \forall_{B \in \mathcal{G}}\ B \in \lambda(\mathcal{G})_A \iff \mathcal{G} \subseteq \lambda(\mathcal{G})_A$$

$$\overset{\textbf{Fakt}}{\iff} \lambda(\mathcal{G}) \subseteq \lambda(\mathcal{G})_A \iff \forall_{B \in \lambda(\mathcal{G})}\ A \cap B \in \lambda(\mathcal{G}).$$

Zatem pokazaliśmy, że $\forall_{A \in \mathcal{G}} \forall_{B \in \lambda(\mathcal{G})}\ A \cap B \in \lambda(\mathcal{G})$.

Krok 2. Niech $B \in \lambda(\mathcal{G})$ oraz $\lambda(\mathcal{G})_B = \{A \subseteq X : A \cap B \in \lambda(\mathcal{G})\}$.

$$\textbf{Krok 1} \implies \forall_{A \in \mathcal{G}}\ A \cap B \in \lambda(\mathcal{G}) \iff \forall_{A \in \mathcal{G}}\ A \in \lambda(\mathcal{G})_B$$

$$\iff \mathcal{G} \subseteq \lambda(\mathcal{G})_B \overset{\textbf{Fakt}}{\iff} \lambda(\mathcal{G}) \subseteq \lambda(\mathcal{G})_B$$

$$\iff \forall_{A \in \lambda(\mathcal{G})}\ A \cap B \in \lambda(\mathcal{G}).$$

Zatem $\forall_{B \in \lambda(\mathcal{G})} \forall_{A \in \lambda(\mathcal{G})}\ A \cap B \in \lambda(\mathcal{G})$, czyli $\lambda(\mathcal{G})$ jest π-układem. $\blacksquare$

Twierdzenie Dynkina (o jednoznaczności miary)

Niech $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$ będzie σ-algebrą generowaną przez $\mathcal{G} \subseteq 2^X$ oraz

1. $\mathcal{G}$ jest zamknięta na przekroje,
2. $X_n \nearrow X$ dla pewnego $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G}$.

Dla dowolnych miar μ i ν na $(X, \mathcal{F})$, które pokrywają się na $\mathcal{G}$ i przyjmują skończone wartości na zbiorach X_n z (2), mamy $\mu = \nu$.

Dowód: Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ rodzina

$$\mathcal{L}_n := \{A \in \mathcal{F} : \mu(A \cap X_n) = \nu(A \cap X_n)\}$$

jest λ-układem. Rzeczywiście,

$(\Lambda 1)$ $\mu(X \cap X_n) = \mu(X_n) \overset{X_n \in \mathcal{G}}{=\!=} \nu(X_n) = \nu(X \cap X_n) \implies X \in \mathcal{L}_n$.

$(\Lambda 2)$ Dla $A \in \mathcal{L}_n$ mamy $\mu(A \cap X_n) = \nu(A \cap X_n) < \infty$ i stąd

$$\mu(A' \cap X_n) = \mu(X_n \setminus A) \overset{\text{różn}}{=\!=} \mu(X_n) - \mu(A \cap X_n) = \nu(X_n) - \nu(A \cap X_n)$$

$$\overset{\text{różn}}{=\!=} \nu(X_n \setminus A) = \nu(A' \cap X_n).$$

Zatem $A' \in \mathcal{L}_n$.

(Λ3) Dla parami rozłącznych $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}_n$ mamy

$$\mu\Big(\bigsqcup_{m=1}^{\infty} A_m \cap X_n\Big) \overset{\sigma\text{-add}}{=\!=} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m \cap X_n) \overset{A_m \in \mathcal{L}_n}{=\!=} \sum_{m=1}^{\infty} \nu(A_m \cap X_n)$$

$$\overset{\sigma\text{-add}}{=\!=} \nu\Big(\bigsqcup_{m=1}^{\infty} A_m \cap X_n\Big).$$

Czyli $\bigsqcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{L}_n$. Zatem $\mathcal{L}_n$ jest λ-układem.

Zauważmy teraz, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\mu|_{\mathcal{G}} = \nu|_{\mathcal{G}} \Longrightarrow \mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}_n \xrightarrow{\mathcal{L}_n\ \lambda\text{-układ}} \lambda(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{L}_n.$$

Na mocy założenia (1) oraz **Lemat o λ i π-układach** mamy

$$\lambda(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{F}.$$

Zatem dla każdego $A \in \mathcal{F}$ i $n \in \mathbb{N}$ mamy $\mu(A \cap X_n) = \nu(A \cap X_n)$.

Stąd, że $A \cap X_n \nearrow A$ i z ciągłości miary dostajemy

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap X_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap X_n) = \nu(A). \qquad \blacksquare$$

Def. Miara μ na $(X, \mathcal{F})$ jest σ-**skończona** jeśli istnieją parami rozłączne $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ takie, że $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} Y_n = X$ oraz $\mu(Y_n) < \infty$

Uw. μ jest σ-skończona $\iff$ istnieje ciąg $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ taki, że $X_n \nearrow X$ oraz $\mu(X_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Wn1. Miara Lebesgue'a jest jednoznacznie wyznaczona przez

$$\forall_{\substack{a_i, b_i \in \mathbb{Q} \\ a_i < b_i}} \quad \lambda^n\Big([a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)\Big) = \prod_{i=1}^{n} |b_i - a_i|$$

Dowód: Rodzina

$$\mathcal{P}_w := \{[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n) : a_i, b_i \in \mathbb{Q}\}$$

jest zamknięta na przekroje i kładąc $X_m = [-m, m)^n \in \mathcal{P}_w$ mamy $X_m \nearrow \mathbb{R}^n$ oraz $\lambda^n(X_m) = (2m)^n < \infty$. Skoro $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{P}_w)$, to dla dowolnej miary μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$\mu|_{\mathcal{P}_w} = \lambda^n|_{\mathcal{P}_w} \implies \mu = \lambda^n. \qquad \blacksquare$$

Wn2. Miara Lebesgue'a jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia, tzn. $\forall_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}\forall_{x\in\mathbb{R}^n}\quad \lambda^n\big(x+B\big)=\lambda^n(B)$.

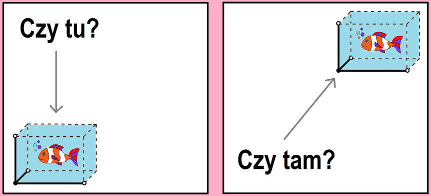
Dowód: Niech $x\in\mathbb{R}^n$. Dla $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ przesunięty zbiór $x+B:=\{x+y: y\in B\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ jest borelowski. Wzór

$$\mu(B):=\lambda^n\big(x+B\big),\qquad B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

definiuje miarę na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dla $P=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_n,b_n)\in\mathcal{P}_w$

$$\begin{aligned}\mu(P)&=\lambda^n\big(x+P\big)\\&=\lambda^n([x_1+a_1,x_1+b_1)\times\cdots\times[x_n+a_n,x_n+b_n))\\&=\textstyle\prod_{i=1}^n|(x_i+b_i)-(x_i+a_i)|\\&=\textstyle\prod_{i=1}^n|b_i-a_i|\\&=\lambda^n(P).\end{aligned}$$

Zatem $\mu=\lambda^n$ na mocy **Wn1**. $\blacksquare$



"Prostopadłościan jest ten sam"

Wn3. Każda miara μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ niezmiennicza na przesunięcia z $c := \mu([0,1)^n) < \infty$, jest krotnością miary Lebesgue'a: $\mu = c \cdot \lambda^n$.

Dowód: Niech $P = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) \in \mathcal{P}_w$. Niech M będzie wspólnym mianownikiem dla wszystkich ułamków $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Wtedy

$$P = \bigsqcup_{k=1}^{K} \left(x^{(k)} + \left[0, \tfrac{1}{M}\right)^n \right) \text{ dla pewnych } K \in \mathbb{N} \text{ oraz } x^{(k)} \in \mathbb{R}^n.$$

Z niezmienniczości na przesunięcia i addytywności μ oraz λ^n

$$\mu(P) = K\mu\left(\left[0, \tfrac{1}{M}\right)^n\right) \quad \text{oraz} \quad \lambda^n(P) = K\lambda^n\left(\left[0, \tfrac{1}{M}\right)^n\right) = \tfrac{K}{M^n}.$$

Podobnie $c = \mu([0,1)^n) = M^n \mu\left(\left[0, \frac{1}{M}\right)^n\right)$. Stąd

$$\frac{\mu(P)}{c} = \frac{K\mu([0, \frac{1}{M})^n)}{M^n \mu([0, \frac{1}{M})^n)} = \frac{K}{M^n} = \lambda^n(P).$$

Zatem $\mu(P) = c \cdot \lambda^n(P)$ dla każdego $P \in \mathcal{P}_w$. Czyli $\mu = c \cdot \lambda^n$ na mocy **Wn1**. ∎